EXERCÍCIOS CAPÍTULO 4

1. Numa dada loja de componentes para computadores, as vendas diárias de discos rígidos das marcas *X* e *Y* têm a seguinte função probabilidade conjunta:

$y \setminus x$	**0**	**1**	**2**
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

   a) Determine as funções de distribuição marginais de *X* e de *Y*.
   b) Qual a probabilidade de, num dia, a marca *X* ser a mais vendida?
   c) Qual a proporção de dias em que se vende igual número de discos das marcas referidas?
   d) Obtenha a função probabilidade de *X*, nos dias em que se vende exactamente um disco da marca *Y*.
   e) Verifique se as variáveis são independentes.
   f) Calcule as médias e as variâncias de *X* e de *Y*.
   g) Calcule o coeficiente de correlação.
   h) Verifique que $E(Y \mid X = x)$ não coincide com $E(Y)$. Comente.
   i) Calcule a média e a variância de $Z = X - Y$.

2. Seja (X, Y) uma variável aleatória que representa o número de leitores de MP3 das marcas *A* e *B*, respectivamente, vendidos diariamente numa loja, com função probabilidade conjunta dada por

$y \setminus x$	**0**	**1**	**2**
0	a	0.06	0.04
1	0.09	b	0.01
2	0.05	0.02	0.01

   a) Calcule $f_{Y|X=2}(y)$ e comente o seu significado.
   b) Sabendo que em 80% dos dias não se vendem leitores da marca *A*, determine o valor das constantes *a* e *b*, bem como a probabilidade de, nessa loja, se venderem mais de 2 leitores de MP3 de marca *A* num dia.
   c) Determine a função de distribuição do total de leitores de MP3 vendidos diariamente nessa loja.

3. Os acertos finais para obtenção da cor desejada para uma tinta são feitos em primeiro lugar por um computador, sendo completados manualmente por um operário especializado. O número de afinações de cor levadas a efeito pelo computador varia entre uma e três. O operário examina o trabalho e procede ou não a uma última afinação manual, consoante julgar necessário.
   Da experiência passada sabe-se que:
   – Em 60% dos casos não é necessária qualquer afinação manual;
   – Em 30% dos casos o computador leva a efeito uma única afinação de cor, e, em 40% destes, já não é necessário proceder a qualquer afinação manual;

- Em 60% dos casos o computador leva a efeito duas afinações de cor;
- Quando o computador realiza três afinações de cor é sempre necessário afinação manual.

Calcule a função probabilidade de (X,Y), onde *X* representa o número de afinações de cor realizadas pelo computador, e *Y*, o número de afinações manuais. Estude a independência das variáveis.

4. A função probabilidade conjunta de (X,Y) é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{x+y}{32} \quad (x=1,2;\, y=1,2,3,4).$$

a) Obtenha as funções probabilidade marginais de *X* e de *Y*.
b) Mostre que as variáveis não são independentes.
c) Calcule $P(X>Y)$.
d) Calcule $P(X=2Y)$.
e) Obtenha as funções probabilidade condicionadas.
f) Calcule as médias e as variâncias de *X* e de *Y*.
g) Determine o coeficiente de correlação.
h) Obtenha $E(X \mid Y=y)$.

5. O número de jogadores suplentes disponíveis que uma dada equipa amadora de futebol pode utilizar em cada jogo é uma variável aleatória X, enquanto o número dos utilizados é uma outra variável aleatória Y. A função de probabilidade conjunta é dada por,

$$f(x,y)=\frac{1}{15} \quad \text{para } x=0,1,2,3,4 \text{ e } y \text{ inteiro } 0\le y\le x.$$

a) Qual a probabilidade de num jogo serem utilizados todos os suplentes, sabendo que havia pelo menos um disponível?
b) Em média, quantos jogadores suplentes são utilizados por desafio?
c) Determine $E(Y \mid X=2)$ e diga qual o seu significado.

6. Seja (X,Y) uma variável aleatória discreta que representa, para cada uma das famílias residentes numa determinada zona, o número de filhos da família (*X*) e o número de assoalhadas do seu alojamento (*Y*).

Conhece-se a função de probabilidade marginal de *Y*

y	2	3	4	5
$f_Y(y)$	0.11	0.33	0.38	0.18

e a função de probabilidade conjunta de (X,Y) dada por,

y \ x	0	1	2	3	4
2	a	0.05	0.02	0.00	0.00
3	0.05	0.09	0.14	0.04	c
4	0.02	0.09	b	0.06	a
5	c	0.05	0.05	0.05	d

a) Calcule a função de distribuição marginal de Y.

b) Determine, justificando, o valor das constantes a, b, c e d e estude a independência das variáveis X e Y.
c) Qual a percentagem de famílias dessa região com mais de dois filhos?
d) Calcule $f_{X|Y=4}(x)$ e diga qual o seu significado quando $x = 2$.
e) Qual o número médio de filhos das famílias que habitam em alojamentos com 4 assoalhadas?
f) Calcule $E(Y \mid X = 1)$ e $\mathrm{Var}(Y \mid X = 1)$.

7. Um comerciante vende, entre outros artigos, máquinas de calcular de certo tipo. Seja (X,Y) uma variável aleatória discreta onde X representa o número de máquinas recebidas mensalmente para venda, e Y o número de máquinas vendidas também mensalmente, com distribuição dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = 1/9 \quad (x = 1, 2, 3;\, y = 0, 1, \ldots, x).$$

a) Calcule as funções probabilidade marginais e estude a independência entre X e Y.
b) Calcule a função probabilidade condicionada, $f_{Y|X=2}(y)$, e diga qual o seu significado.
c) Obtenha a função probabilidade da variável aleatória que representa o número de máquinas que ficam por vender mensalmente.
d) Calcule a média e a variância de X e de Y.
e) Obtenha $E(Y \mid X = x)$. Interprete o valor para $x = 2$.
f) Determine a média e a variância do número de máquinas que ficam por vender mensalmente.
g) Determine o coeficiente de correlação entre X e Y.

8. Uma máquina produz determinado tipo de componentes electrónicas. Essas componentes podem ter um e um só de dois tipos de defeitos (A ou B), com probabilidades de 0.07 e 0.03, respectivamente. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso, de forma independente, duas componentes da produção da máquina. Seja X a variável aleatória que representa o número de defeitos do tipo A no conjunto das duas componentes, e Y, para o número de defeitos do tipo B.
a) Construa a função probabilidade conjunta de (X,Y).
b) Determine as funções probabilidade marginais e analise a independência das variáveis.
c) Calcule a probabilidade de se encontrar, no conjunto das duas componentes, um defeito do tipo B, sabendo que nenhuma das componentes apresenta defeito do tipo A.
d) Determine a função probabilidade do número total de defeitos no conjunto das duas componentes.

9. Dois jogadores, A e B, atiram uma moeda ao ar. Se sair «caras», o jogador A paga um euro ao jogador B; se sair «coroa», o jogador B paga um euro ao jogador A. O jogo acaba quando um dos jogadores fica sem dinheiro. O jogador A tem 2 euros, e o jogador B, 1 euro. Seja X o n.º de lançamentos da moeda até que o jogo acabe.

a) Construa a função probabilidade de X.
b) Qual a probabilidade de o jogador B ganhar?

10. O João, para descontrair nos intervalos da sua preparação para os exames, costuma realizar o seguinte jogo: efectua séries de lançamentos a um cesto de basquetebol, num mínimo de 2 lançamentos e máximo de 4, por série. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional em que X é o número de lançamentos realizados numa série e Y é o número de lançamentos acertados nessa série. A função probabilidade conjunta de (X,Y) é dada por:

x \ y	0	1	2	3	4
2	0.072	0.025	0.003	0.000	0.000
3	0.362	0.162	0.025	0.001	0.000
4	0.231	0.103	0.015	0.0009	0.0001

a) Obtenha as funções probabilidade marginais de X e de Y e analise a independência das variáveis.
b) Numa série em que o João efectua dois lançamentos calcule probabilidade de não acertar nenhum.
c) Calcule e interprete o significado de $E(Y \mid X = 4)$.
d) Qual a média e o desvio padrão do número de lançamentos falhados por série.

11. Uma loja de informática vende um modelo de computador portátil e a respectiva mala para o transportar caso os clientes o desejem. Seja X o número desses computadores e Y o número de malas vendidos diariamente nessa loja. A função de probabilidade conjunta de (X,Y) está representada no quadro seguinte:

x \ y	0	1	2	3
0	0.200	0	0	0
1	0.100	0.150	0	0
2	0.150	0.125	0.100	0
3	0.050	0.075	0.025	0.025

a) Verifique se as variáveis são ou não independentes.
b) Qual a percentagem de dias em que se vende igual número de computadores portáteis e de malas.
c) Qual a probabilidade de se venderem pelo menos duas malas num dia em que se vendem três desses computadores.
d) Sabendo que cada computador portátil é vendido por 750€ e cada mala por 80€, determine a média e o desvio padrão do montante vendido diariamente nessa loja, respeitante a esses dois produtos.

12. Suponha que a experiência aleatória consiste no lançamento de um par de dados (um verde e outro amarelo). Considerem-se as seguintes variáveis aleatórias: X é o nú-

mero de pontos do dado verde; Y é a soma dos pontos nos dois dados.

a) Obtenha a função probabilidade conjunta.

b) Calcule a média e a variância de X e de Y.

c) Determine o coeficiente de correlação. As variáveis aleatórias são independentes?

d) Obtenha $f_{X|Y=4}(x)$. Calcule $E(X \mid Y=4)$ e $\text{Var}(X \mid Y=4)$

13. Considere o vector aleatório (X,Y), onde X representa o tempo de permanência de um aluno na aula, e Y, o aproveitamento que faz da mesma (tempo em que está atento às matérias em discussão), com função densidade

$$f_{X,Y}(x,y) = k \quad (0 < x < 1; 0 < y < 0.8x).$$

a) Mostre que $k = 2.5$.

b) Qual a probabilidade de um aluno aproveitar mais que 50% do tempo de permanência na aula.

14. Considere que o vector aleatório (X,Y) tem função densidade

$$f_{X,Y}(x,y) = 2 \quad (0 < x < 1; 0 < y < 1/2).$$

a) Verifique que é uma função densidade.

b) Obtenha as funções densidade marginais de X e de Y, e analise a independência.

c) Calcule $P(X > 1/2, Y < 1/4)$.

d) Calcule $P(Y > X)$.

e) Calcule a média e a variância de X e de Y.

f) Obtenha o coeficiente de correlação entre X e Y.

15. Num determinado estudo pretende-se realizar um inquérito relativo aos alojamentos das famílias de uma região. Parte da informação será recolhida mediante a resposta a um questionário enviado pelo correio (inquérito postal), e o resto será conduzido por entrevista telefónica. O Instituto de Estatística local supõe que a distribuição conjunta da proporção de famílias que respondem ao inquérito postal, X, e da proporção de alojamentos que respondem à entrevista telefónica, Y, é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{3x+5y}{4} \quad (0 < x < 1; 0 < y < 1).$$

a) Estude a independência das duas variáveis aleatórias.

b) Calcule a probabilidade de a proporção de questionários preenchidos por entrevista telefónica ser pelo menos o dobro da proporção de questionários preenchidos enviados por correio.

16. Seja

$$f_{X,Y}(x,y) = x + y \quad (0 < x < 1; 0 < y < 1).$$

a) Calcule $P(X > 1/2,\, Y > 1/2)$.

b) Determine as funções densidade marginais, e analise a independência das variáveis.

c) Obtenha as funções densidade condicionadas.

17. Uma empresa dedica-se ao comércio de diversos artigos, cujas vendas têm comportamentos aleatórios. As vendas mensais dos artigos *A* e *B*, expressas em unidades monetárias, constituem um vector aleatório (X,Y), com função densidade

$$f_{X,Y}(x,y) = k \quad (0 < x < 2; 0 < y < x).$$

a) Calcule o valor de *k*.

b) Determine a percentagem de meses em que as vendas do artigo *A* e do artigo *B* são ambas superiores a uma unidade monetária.

c) Qual a percentagem de meses em que as vendas do artigo *A* são superiores a uma unidade monetária.

18. Uma empresa possui duas fábricas, *A* e *B*, que produzem o mesmo artigo. Considere-se a variável aleatória bidimensional contínua, (X,Y), que representa a produção semanal (em toneladas) das fábricas *A* e *B*, respectivamente. Sabe-se que:

$$f_Y(y) = \frac{2(5y - y^2)}{33} \quad (1 < y < 4);$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{5-y} \quad (1 < x < 6 - y; 1 < y < 4; y \text{ fixo})$$

a) Determine a função de distribuição marginal de *Y*.

b) Numa semana em que a fábrica *B* produziu 2 toneladas qual é a probabilidade da fábrica *A* produzir mais de 3 toneladas?

c) Determine, justificando, a função densidade de (X,Y).

d) Qual a percentagem de semanas em que a produção da fábrica *A* é superior à da fábrica *B*?

19. O tempo, em minutos, que o piloto *A* demora a fazer um determinado circuito é uma variável aleatória *X* com função densidade dada por $f_X(x) = 1/4 \quad (1 < x < 5)$. O tempo gasto pelo piloto *B*, para o mesmo circuito, é uma variável aleatória *Y* com função densidade definida por $f_Y(y) = y/6 \quad (2 < y < 4)$. Os tempos de percurso dos dois pilotos são independentes.

a) Calcule, justificando, a função densidade de (X,Y).

b) Indique sob a forma de um integral como calcularia $P(X > Y + 1)$? Qual o significado desta probabilidade?

20. Uma pessoa pretende viajar diariamente num comboio que parte entre as 7:20 e as 7:30. A variável aleatória que representa o período de tempo (em minutos) que decorre entre as 7:20 e o momento da partida, X, tem função densidade

$$f_X(x) = \frac{10 - x}{50} \quad (0 < x < 10).$$

A hora de chegada da pessoa à estação é também aleatória, entre as 7:20 e as 7:30.

A variável aleatória que representa o período de tempo (em minutos) que decorre entre as 7:20 e o momento da chegada da pessoa à estação, Y, tem distribuição dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{10} \quad (0 < y < 10).$$

Admita a independência entre as duas variáveis aleatórias.

a) Determine a função de densidade conjunta da variável (X,Y).
b) Calcule a percentagem de dias em que a pessoa viaja nesse comboio.
c) Qual a probabilidade de a pessoa ter que esperar mais de 2 minutos até à partida desse comboio?

21. O João e a Joana combinaram encontrar-se, entre as 15 e as 16 horas, para estudar. Seja X o momento da chegada do João, e Y, o momento da chegada da Joana. Estas variáveis aleatórias são independentes, com funções densidade,

$$f_X(x) = 1 \quad (15 < x < 16)\,; \quad f_Y(y) = 1 \quad (15 < y < 16).$$

a) Obtenha a função densidade conjunta.
b) Qual a probabilidade de ambos chegarem entre as 15:30 e as 16:00?
c) Qual a probabilidade de o João chegar antes da Joana?
d) Se o primeiro a chegar esperar apenas 15 minutos pelo outro, qual a probabilidade de estudarem juntos nesse dia?

22. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente:

a) Conhecendo as distribuições marginais de X e de Y pode sempre calcular-se a distribuição conjunta de (X,Y).
b) Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional com função de distribuição $F_{X,Y}(x,y)$. Se $F_{X,Y}(0,0)=0$ pode-se garantir que $P(X>0)=1$.
c) Se X e Y são variáveis aleatórias contínuas, tem-se $P(X<2Y)+P(X>2Y)=1$.
d) Considere a variável bidimensional (X,Y) e a respectiva distribuição conjunta. Se para um dado ponto (a,b) se tem $f_{X,Y}(a,b)=f_X(a)\times f_Y(b)$ então as variáveis aleatórias X e Y são independentes.
e) Sendo (X,Y) uma variável bidimensional discreta com função probabilidade conjunta $f(x,y)$ pode afirmar-se que, para todo o par (x,y), $f(x,y) \le P(X=x)$.

23. Uma empresa possui duas fábricas A e B que produzem o mesmo artigo. Sejam X e Y as quantidades, em toneladas, mensalmente produzidas, respectivamente, nas fábricas A e B, com funções de distribuição marginais dadas por,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{16} & 0 < x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \dfrac{y}{3} & 0 < y < 3 \\ 1 & y \ge 3 \end{cases}.$$

As quantidades produzidas pelas fábricas são independentes.

a) Calcule, justificando, a função densidade conjunta de (X,Y).

b) Qual a percentagem de meses em que a produção da fábrica B é superior à de A?

c) Qual a média e a variância da quantidade total desse artigo produzida mensalmente na empresa.

24. Uma empresa dedica-se ao comércio de diversos artigos, cujas vendas têm comportamentos aleatórios. As vendas mensais dos artigos A e B, expressas em unidades monetárias, constituem um vector aleatório (X,Y) com função densidade

$f_{X,Y}(x,y)=1/2 \quad (0<x<2, 0<y<x)$.

a) Calcule a média e a variância de X, e de Y.

b) Estude a independência das variáveis e determine o coeficiente de correlação.

c) Obtenha a média da variável Y, condicionada por $X=1$.

d) Determine a média e a variância do total das vendas dos dois artigos em causa?

25. Considere o vector aleatório (X,Y), onde X representa o tempo de permanência de um aluno na aula, e Y, o aproveitamento que faz da mesma (tempo em que está atento às matérias em discussão), com função densidade

$$f_{X,Y}(x,y)=2.5 \quad (0<x<1, 0<y<0.8x).$$

Obtenha o $E(Y \mid X=x)$, e interprete o resultado quanto ao grau de aproveitamento das aulas.

26. Considere duas variáveis aleatórias, X e Y, com função densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y)=8xy \quad (0<x<1, 0<y<x).$$

a) Calcule a média e a variância de X, e de Y.

b) Determine o valor esperado do produto das variáveis, e conclua sobre a independência.

c) Obtenha o coeficiente de correlação entre X e Y.

d) Calcule $E(X \mid Y=y)$.

27. A duração de uma aula e o tempo de permanência de um aluno na mesma são variáveis aleatórias, X e Y, com função densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y)=5x^3 \quad (0<y<x, 0<x<1).$$

a) Calcule a duração média de uma aula.

b) Mostre que a distribuição de Y condicionada por $X=x$ é uma distribuição uniforme, e calcule a respectiva média. Interprete, no contexto do exercício, o resultado obtido.

28. A quantidade semanal de matéria-prima recebida por uma fábrica é uma variável aleatória X e a quantidade dessa mesma matéria-prima consumida semanalmente na produção é uma variável aleatória Y. Sabe-se que:

$f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{3y^2}{x^3}$ $(0 < y < x)$ com x fixo e $0 < x < 1$; $f_X(x) = 5x^4$ $(0 < x < 1)$.

a) Calcule a média e o desvio padrão da quantidade recebida semanalmente.

b) Calcule $E(Y \mid X = x)$ e represente graficamente. Determine e diga qual o significado de $E(Y \mid X = 0.75)$.

c) Calcule a média e a variância da quantidade semanal de matéria-prima que fica por consumir.

d) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y, e comente o resultado.

29. Uma fábrica utiliza na sua produção uma determinada matéria prima que compra a dois fornecedores F1 e F2. Seja (X, Y) a variável aleatória que representa a quantidade (em toneladas) dessa matéria prima fornecida mensalmente por F1 e F2, respectivamente. Conhece-se:

$$f_X(x) = \frac{9 - x^2}{18} \quad (0 < x < 3)$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{3 - x} \quad (1 < y < 4 - x) \qquad (x \text{ } fixo, \quad 0 < x < 3).$$

a) Calcule a função de distribuição marginal de X.

b) Determine $E(Y \mid X = x)$. Calcule o seu valor para $x = 1$ e diga qual o seu significado.

c) Determine a função densidade conjunta, $f(x, y)$, e indique, <u>sem efectuar os cálculos</u>, como calcularia a percentagem de meses em que a quantidade fornecida por F1 é superior à fornecida por F2?

30. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente:

a) Existindo os valores esperados envolvidos, se $E(XY) = E(X)E(Y)$ então X e Y são independentes.

b) Existindo $\mathrm{Var}(X)$ e $\mathrm{Var}(Y)$ tem-se sempre que $\mathrm{Var}(X - Y) \leq \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

c) Se X e Y são variáveis aleatórias tais que $\mathrm{cov}(X, Y) = 3$, então X e Y não podem ser independentes.

d) Se X e Y são independentes com $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = \sigma^2$, então $\mathrm{var}(X + 2Y) = 3\sigma^2$.

e) Um par de variáveis aleatórias contínuas diz-se negativamente associado se a sua função densidade conjunta, $f(x, y)$, verifica $-1 \leq f(x, y) \leq 0$ para todo o par (x,y).

31. Considere o vector aleatório (X, Y) com função probabilidade:

$y \backslash x$	**–1**	**0**	**1**
–1	b	0	c
0	0	a	0
1	c	0	b

a) Determine as relações entre a, b e c de forma que: X e Y não estejam correlacionadas; exista uma correlação perfeita entre X e Y.

b) Calcule a média e a variância de $Z = |X - Y|$.

32. Considere duas variáveis aleatórias *X* e *Y*, não correlacionadas, com igual variância. Supondo que $U = X - Y$ e $V = 2Y$, mostre que

$$\rho_{U,V} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

33. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com função densidade

$$f_{X,Y}(x, y) = 1 \quad (0 < x < 1, -x < y < x).$$

Mostre que, apesar de a correlação ser nula, as variáveis *X* e *Y* não são independentes.

34. Seja X uma variável aleatória em que $E(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$. Considere a variável aleatória $Z = X_1 + X_2$, onde X_1 e X_2 são duas observações independentes de *X*. Calcule o coeficiente de correlação entre *Z* e X_1.

35. Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias independentes com variâncias σ_X^2 e σ_Y^2, respectivamente. Sendo $Z = X + Y$ e $W = X - Y$, mostre que:

$$\rho_{ZW} = \frac{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}.$$

36. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional tal que, $X \sim f_X(x) = 2 \quad (-1 < x < 1)$ e $Y = X^2$. Calcule o coeficiente de correlação entre *X* e *Y*. Comente.

SOLUÇÕES

1. a) $F_X(x)=0$ ($x<0$), $F_X(x)=0.20$ ($0\le x<1$), $F_X(x)=0.85$ ($1\le x<2$), $F_X(x)=1$ ($x\ge 2$); $F_Y(y)=0$ ($y<0$), $F_Y(y)=0.50$ ($0\le y<1$); $F_Y(y)=0.86$ ($1\le y<2$), $F_Y(y)=1$ ($y\ge 2$); b) 0.39; c) 0.43;
   d) $f_{X|Y=1}(0)=5/36$, $f_{X|Y=1}(1)=30/36$, $f_{X|Y=1}(2)=1/36$;
   e) não são independentes; f) 0.95, 0.3475, 0.64, 0.5104; g) $\rho=-0.1140$;
   h) 0.55, 0.77, 0.20; i) 0.31, 0.9539.
2. a) $f_{Y|X=2}(0)=4/6$, $f_{Y|X=2}(1)=f_{Y|X=2}(2)=1/6$; b) 0.66, 0.06, 0;
   c) $F_T(t)=0$ $(t<0)$, $F_T(t)=0.66$ $(0\le t<1)$, $F_T(t)=0.81$ $(1\le t<2)$, $F_T(t)=0.96$ $(2\le t<3)$, $F_T(t)=0.99$ $(3\le t<4)$, $F_T(t)=1$ $(t\ge 4)$.
3. $f(1{,}0)=0.12$, $f(2{,}0)=0.48$, $f(3{,}0)=0$, $f(1{,}1)=0.18$, $f(2{,}1)=0.12$, $f(3{,}1)=0.10$; não são independentes.
4. a) $f_X(x)=(2x+5)/16$ ($x=1,2$); $f_Y(y)=(2y+3)/32$ ($y=1,2,3,4$);
   c) 3/32; d) 3/32; e) $f_{X|Y=y}(x)=(x+y)/(2y+3)$ ($x=1,2$) e (y fixo, $y=1,2,3,4$);
   $f_{Y|X=x}(y)=(x+y)/(4x+10)$ ($y=1,2,3,4$) e (x fixo, $x=1,2$).
   f) 1.5625, 0.2461, 2.8125, 1.1523; g) -0.0367;
   h) 1.6, 1.5714, 1.5556, 1.5455 ou $E(X\mid Y=y)=\dfrac{5+3y}{3+2y}$ $(y=1,2,3,4)$.
5. a) 0.2857; b) 1.3333; c) 1 .
6. a) $F_Y(y)=0$ ($y<2$), $F_Y(y)=0.11$ ($2\le y<3$), $F_Y(y)=0.44$ ($3\le y<4$), $F_Y(y)=0.82$ ($4\le y<5$), $F_Y(y)=1$ ($y\ge 5$) ; b) $a=0.04$, $b=0.17$, $c=0.01$, $d=0.02$, não são independentes ; c) 22% ; d) $f_{X|Y=4}(0)=2/38$, $f_{X|Y=4}(1)=9/38$, $f_{X|Y=4}(2)=17/38$, $f_{X|Y=4}(3)=6/38$, $f_{X|Y=4}(4)=4/38$;
   e) 2.0263; f) 3.5 , 0.9643.
7. a) $f_X(1)=2/9$, $f_X(2)=3/9$, $f_X(3)=4/9$; $f_Y(0)=f_Y(1)=3/9$, $f_Y(2)=2/9$, $f_Y(3)=1/9$, não são independentes;
   b) $f_{Y|X=2}(y)=1/3$ ($y=0,1,2$);
   c) $f_Z(0)=f_Z(1)=3/9$, $f_Z(2)=2/9$, $f_Z(3)=1/9$.
   d) 2.2222, 0.6173, 1.1111, 0.9877; e) 0.5, 1, 1.5; f) 1.1111; g) 0.3953.
8. a) $f(0{,}0)=0.81$, $f(0{,}1)=0.054$, $f(0{,}2)=0.0009$, $f(1{,}0)=0.126$, $f(1{,}1)=0.0042$, $f(2{,}0)=0.0049$;
   b) $f_X(0)=0.8649$, $f_X(1)=0.1302$, $f_X(2)=0.0049$,
   $f_Y(0)=0.9409$ $f_Y(1)=0.0582$, $f_Y(2)=0.0009$; não são independentes;
   c) 0.0624; d) $f_T(0)=0.81$, $f_T(1)=0.18$, $f_T(2)=0.01$.
9. a) $f(x)=0.5^x$ ($x=1,2,3,\ldots$); b) 1/3.
10. a) $f_X(2)=0.1$, $f_X(3)=0.55$, $f_X(3)=0.35$; $f_Y(0)=0.665$, $f_Y(1)=0.29$ $f_Y(2)=0.043$, $f_Y(3)=0.0019$, $f_Y(4)=0.0001$, não são independentes ;
    b) 0.72; c) 0.3889; d) 2.8679, 0.8385.
11. a) não são independentes ; b) 47.5%; c) 0.2857; d) 1197.75, 781.401.
12. a) $f(x,y)=1/36$ $(x=1,2,3,4,5,6 \wedge y=x+1,x+2,\ldots,x+6)$;
    b) 3.5, 2.9167, 7, 5.8333; c) 0.7071, não são independentes;
    d) $f_{X|Y=4}(x)=1/3$ $(x=1,2,3)$, 2, 0.6667.

13. b) 0.375.
14. b) $f_X(x)=1$ $(0<x<1)$, $f_Y(y)=2$ $(0<y<1/2)$, independentes; c) 0.25; d) 0.25; e) 0.5, 0.0833, 0.25, 0.0208; f) 0.
15. a) não são independentes; b) 0.2396.
16. a) 0.375;
    b) $f_X(x)=x+0.5$ $(0<x<1)$; $f_Y(y)=y+0.5$ $(0<y<1)$, não são independentes;
    c) $f_{X|Y=y}(x)=(x+y)/(y+0.5)$ $(0<x<1)$ e $(0<y<1$, y fixo);
    $f_{Y|X=x}(y)=(x+y)/(x+0.5)$ $(0<y<1)$ e $(0<x<1$, x fixo).
17. a) 0.5; b) 0.25; c) 0.75.
18. a) $F_Y(y)=0$ $(y<1)$, $F_Y(y)=(15y^2-2y^3-13)/99$ $(1\le y<4)$,
    $F_Y(y)=1$ $(y\ge 4)$;
    b) 1/3; c) $f(x,y)=2y/33$ $(1<x<6-y, 1<y<4)$; d) 0.3636.
19. a) $f(x,y)=y/24$ $(1<x<5, 2<y<4)$.
20. a) $f(x,y)=(10-x)/500$ $(0<x<10,\ 0<y<10)$; b) 1/3; c) 0.1707.
21. a) $f(x,y)=1$ $(15<x<16,\ 15<y<16)$; b) 0.25; c) 0.5; d) 0.4375.
22. a) F; b) F; c) V; d) F; e) V.
23. a) $f(x,y)=x/24$ $(0<x<4, 0<y<3)$; b) 0.1875 ; c) 4.1667, 1.6389.
24. a) 4/3, 2/3, 2/9, 2/9; b) 1/2; c) 0.5; d) 2, 2/3.
25. $0.4x$, $(0<x<1)$.
26. a) 0.8, 0.533, 0.0267, 0.0489; b) 0.444; c) 0.4924;
    d) $2(1-y^3)/\{3(1-y^2)\}$ $(0<y<1)$.
27. a) 0.8333.
28. a) 5/6, 0.1409; b) $3x/4$, $(0<x<1)$, 0.5625; c) 0.2083, 0.0280 ; d) 0.5423.
29. a) $F_X(x)=0$ $(x<0)$, $F_X(x)=(x/2)-(x^3/54)$ $(0\le x<3)$, $F_X(x)=1$ $(x\ge 3)$;
    b) $(5-x)/2$ $(0<x<3)$, 2.
30. a) F; b) F; c) V; d) F; e) F.
31. a) $\rho=0$: $c=b$ e $a=1-4b$; $\rho=1$: $2b+a=1$ e $c=0$; $\rho=-1$: $2c+a=1$ e $b=0$;
    b) $4c$, $8c(1-2c)$.
34. 0.7071.
36. 0.